



12. Parciális differenciálegyenlet numerikus megoldása

Az olyan egyenlőséget, amely valamely többváltozós függvény parciális deriváltjai, független változói és függvényértéke között állapít meg összefüggést, **parciális differenciálegyenletnek** nevezzük.

Számtalan tudományos és mérnöki feladat megoldása során parciális differenciálegyenlethez jutunk, melyek analitikus megoldása csak nagyon korlátozott kezdeti illetve peremfeltételek esetén lehetséges. A parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása külön kurzust igényel, itt csak a legalapvetőbb fogalmak összefoglalására, illetve néhány MAPLE alkalmazásra szorítkozhatunk. A lineáris, másodrendű, kétváltozós parciális differenciálegyenletek analitikus és numerikus megoldásával foglalkozunk, speciális kerületi illetve peremfeltételek esetén.

A másodrendű, lineáris parciális differenciálegyenleteknek a fizikai alkalmazások szerint három típusát különböztetik meg:

Elliptikus (Poisson) típusú parciális differenciálegyenlet:

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) = f(x, y)$$

röviden írva

$$\Delta u = f(x, y)$$

Peremfeltétel: az egyenlet a sík valamely korlátos R tartományának pontjaiban igaz, melynek S határán

$$u(x, y) = g(x, y) .$$

Homogén, elliptikus parciális differenciálegyenlet (Laplace-típus):

$$\Delta u = 0 .$$

A Laplace egyenlet megoldásait **harmonikus függvényeknek** nevezik.

Az elliptikus egyenletekben nem szerepel időszerű változó, nincs kitüntetett terjedési irány, így a megoldás csak az összes határfeltételek együttes ismeretében adható meg .

Egyensúlyi állapotok, stacionárius áramlások leírása alkalmas, ahol forrásmentes esetben $f(x, y) = 0$.

Parabolikus parciális differenciálegyenlet:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

Kezdeti feltétel:

$$u(x, 0) = f(x)$$

Peremfeltételek:

$$u(0, t) = U_1, \quad u(1, t) = U_2$$

A parabolikus egyenletekkel leírt rendszerekben a pontszerű változás hatására az információ végtelen gyorsan terjed. Ugyanakkor maga a hatás általában exponenciálisan csökken a távolsággal. A parabolikus egyenletek diffúzió rendszereket írnak le: a viszkózus gázokra vonatkozó Navier-Stokes egyenletek, a véges vezetőképességű plazmákra vonatkozó magnetohidrodinamikai egyenletek, vagy a hőterjedést leíró diffúziós egyenlet parabolikus típusú.

Hiperbolikus parciális differenciálegyenlet (hullám egyenlet):

$$\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t)$$

Kezdeti feltételek:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = g(x) \quad 0 \leq x \leq l,$$

Peremfeltételek:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad t > 0$$

A hiperbolikus egyenletekkel leírt rendszerekben egy adott időbeli és térbeli pontban a közeg állapotának a megváltozása egy későbbi időpontban csak egy véges térrészben fejti ki hatását. Más szóval az információ véges sebességgel terjed. Hiperbolikus egyenletek a vákum elektrodinamikáját leíró Maxwell egyenletek, az összenyomható és elhanyagolható viszkozitású gázokat leíró Euler egyenletek, vagy a mágneses térrel kölcsönható elhanyagolható fajlagos ellenállású plazmákat leíró ideális magnetohidrodinamikai egyenletek.

Az elnevezések magyarázata:

A fenti egyenletek speciális esetei az

$$A \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + C \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) + D \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + E \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) + F u(x, y) = G$$

lineáris, másodrendű parciális differenciálegyenletnek, ahol A, C, D, E, F, G a sík valamely tartományán értelmezett kétváltozós függvények.

Elliptikus, ha $AC > 0$, hiperbolikus, ha $AC < 0$, parabolikus, ha A és C egyike 0, ha $A \equiv 0, CD < 0$, ha $C \equiv 0, AE < 0$.

Geometriai analógia:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

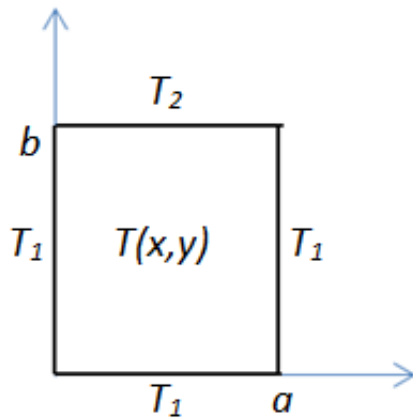
másodrendű görbe ellipszis ha $AC > 0$, hiperbola ha $AC < 0$, parabola ha $AC = 0$.

Használt Maple parancsok: *pdsolve, contourplot, gradplot, mod, pointplot3d, BandMatrix, unassign*

▼ 12. 1. Elliptikus parciális differenciálegyenlet megoldása

▼ 12.1.1. Analitikus megoldás téglalap alakú tartományon

1. Példa Oldjuk meg a Laplace típusú differenciálegyenletet a, b oldalú téglalap tartományra. A téglalap 3 oldalán legyen a hőmérséklet $T1$, a negyedik oldalon $T2$. A megoldás az egyensúlyi állapot beállta utáni kialakuló hőmérsékletelosztást adja meg téglalaptartomány belsejében.



Legyen $u(x, y) = \frac{T(x, y) - T_1}{T_2 - T_1}$.

A peremfeltételek: $R = \{ (x, y) | 0 < x < a, 0 < y < b \}$,
 $u(x, 0) = 0, u(x, b) = 1, u(0, y) = 0, u(a, y) = 0$.

Megoldás:

> restart; with(PDEtools) :

>
$$pde := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) = 0 :$$

> struc := pdsolve(pde, HINT=X(x)Y(y))

$$struc := (u(x, y) = X(x) Y(y)) \&where \left[\left\{ \frac{d^2}{dx^2} X(x) = -c_1 X(x), \frac{d^2}{dy^2} Y(y) = -c_1 Y(y) \right\} \right]$$

> megold := PDEtools[build](struc)

$$megold := u(x, y) = -C3 \sin(\sqrt{-c_1} y) - C1 e^{\sqrt{-c_1} x} + \frac{-C3 \sin(\sqrt{-c_1} y) - C2}{e^{\sqrt{-c_1} x}} \\ + -C4 \cos(\sqrt{-c_1} y) - C1 e^{\sqrt{-c_1} x} + \frac{-C4 \cos(\sqrt{-c_1} y) - C2}{e^{\sqrt{-c_1} x}}$$

A Maple segítségével csak arra van lehetőség, hogy a parciális differenciálegyenlet általános megoldását szorzatos alakban felírjuk, észervegyük, hogy a megoldás trigonometrikus és exponenciális függvényeket tartalmaz. Vizsgáljuk meg, hogy a pdsolve numeric opciója ad-e megoldást?

A peremfeltételek:

> $a := 10 : b := 10 :$

> feltetel := $u(x, 0) = 0, u(x, b) = 1, u(0, y) = 0, u(a, y) = 0 :$

> mo := pdsolve({pde}, {feltetel}); mo := pdsolve({pde}, {feltetel}, numeric);

Error, (in pdsolve/sys) too many arguments; some or all of the following are wrong: [{u(x, y)}, {u(0, y) = 0, u(10, y) = 0, u(x, 0) = 0, u(x, 10) = 1}]
Error, (in pdsolve/numeric) unable to handle elliptic PDEs

Sem analitikus, sem numerikus megoldást nem kaptunk. A partikuláris megoldás megadásához más utat kell választanunk.

A keresett $u(x, y)$ függvényt **szeparációs módszerrel** $u(x, y) = X(x)Y(y)$ alakban keressük. illetve Fourier sorfejtés segítségével határozhatjuk meg. Így az egyenlet

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (X(x) Y(y)) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (X(x) Y(y)) = 0$$

alakú. Ezt átrendezve

$$-\frac{1}{X} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) = \frac{1}{Y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y(y).$$

Mivel a baloldal csak x -től, a jobboldal csak y -től függ, az egyenlőség csak úgy állhat fent, ha mindkét oldal ugyanazon konstans, λ^2 értékű. (A négyzet a pozitivitás miatt kell.)

$$> \quad de1 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) + \lambda^2 X(x) = 0 :$$

$$> \quad de2 := \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y(y) - \lambda^2 Y(y) = 0 :$$

Tehát a parciális differenciálegyenletet két közönséges, másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenlettel helyettesítettük. Oldjuk meg ezeket:

$$> \quad mo1 := \text{subs}(\{ _C1 = C1, _C2 = C2 \}, \text{dsolve}(de1, X(x))); \quad mo2 := \text{subs}(\{ _C1 = C3, _C2 = C4 \}, \text{dsolve}(de2, Y(y)));$$

$$mo1 := X(x) = C1 \sin(\lambda x) + C2 \cos(\lambda x)$$

$$mo2 := Y(y) = C3 e^{-\lambda y} + C4 e^{\lambda y}$$

A parciális differenciálegyenlet általános megoldása

$$> \quad u(x, y) = \text{rhs}(mo1) \cdot \text{rhs}(mo2);$$

$$u(x, y) = (C1 \sin(\lambda x) + C2 \cos(\lambda x)) (C3 e^{-\lambda y} + C4 e^{\lambda y})$$

alakú.

Az $u(0, y) = 0$ kezdeti feltételből következik, hogy

$$> \quad C2 := 0 :$$

Az $u(x, 0) = 0$ feltételből következően

$$> \quad 0 = C1 \sin(\lambda x) \cdot (C3 + C4) :$$

Ez csak akkor lehet (feltételezve hogy $C1 \neq 0$), ha

$$> \quad C3 = -C4 :$$

Kihasználva, hogy $u(a, y) = 0$

$$> \quad 0 = C1 C3 \sin(\lambda a) (e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}) :$$

Ez pedig csak akkor teljesül, ha

$$\sin(\lambda a) = 0.$$

Vagyis

$$\lambda = \frac{n\pi}{a} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ha most feltételezzük, hogy $C1 C3 = 2C_n$ konstans is függ n -től, illetve felhasználjuk hogy $\sinh(x)$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ kapjuk hogy}$$

$$u(x, y) = C_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a}$$

Így végtelen számú megoldást kaptunk, amelyek összege is megoldás.

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a}$$

A negyedik, $u(x, b) = 1$ feltételt felhasználva próbáljuk C_n értékét meghatározni.

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi b}{a}$$

Tételezzük fel, hogy a baloldalon szereplő $1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a}$ trigonometrikus sor alakban előállíthatók. A kifejezés mindkét oldalát $\sin \frac{n\pi x}{a}$ -val megszorozva, és integrálva $[0, b]$ intervallumon

$$\int_0^b 1 \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} dx = \int_0^b \sin \frac{n\pi x}{a} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a} dx.$$

Felhasználva a trigonometrikus integrálok Fourier soroknál megismert tulajdonságait A_n kifejezhető.

> *assume(n, posint) :*

$$A_n = \frac{\int_0^b \sin \frac{n\pi x}{a} dx}{\int_0^b \left(\sin \frac{n\pi x}{a} \right)^2 dx} = - \frac{2 \left((-1)^{n+1} + 1 \right)}{n\pi} = C_n \cdot \sinh \frac{n\pi b}{a}$$

Tehát

$$> u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \cdot \frac{1}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a} :$$

Megkaptuk a keresett $u(x, y)$ kétváltozós függvényt. Számítsuk ki a függvénytörzs részletösszegeit, majd ábrázoljuk a sor 20. részletösszegét:

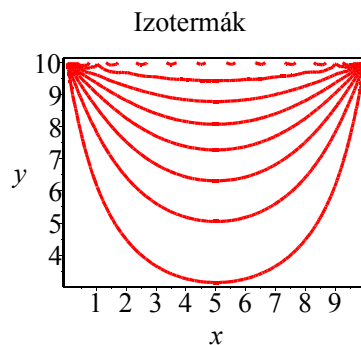
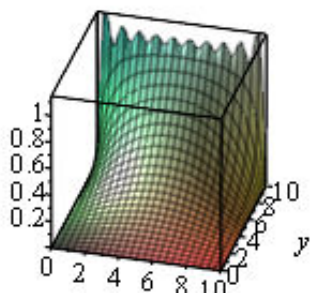
> $u[0] := 0 :$

$$> \text{for } n \text{ to } 20 \text{ do } u_n := u_{n-1} + \frac{2 \left((-1)^{n+1} + 1 \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \sinh \left(\frac{n\pi y}{a} \right)}{\pi n \sinh \left(\frac{n\pi b}{a} \right)} \text{ end do} :$$

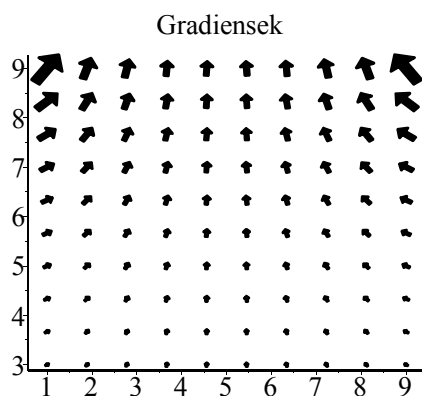
A kapott eredményt többféle módon is ábrázolhatjuk:

> *plot3d(u[20], x=0..10, y=0..10, axes=box, orientation=[-75, 60, 0], style=patch)*

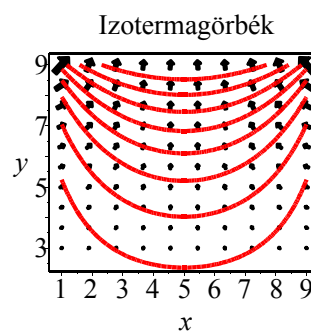
> *plots[contourplot](u[20], x=0..10, y=0..10, axes=box, color=red, title="Izotermák")*



```
> nyilak := plots[gradplot](u[10], x
= 1..9, y = 3..9, arrows
= THICK, grid = [10, 10], title
= "Gradiensek") : nyilak;
```



```
> plots[display]([szintek,
nyilak])
```



▼ 12. 1. 2. Numerikus megoldás téglalap alakú tartományon

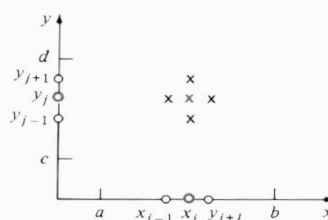
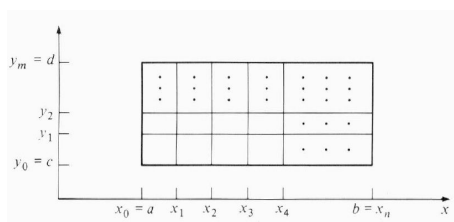
A 11. fejezet 3. részében megismert véges differenciák módszerét alkalmazzuk a

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) = f(x, y)$$

differenciálegyenlet megoldására, ahol a sík valamely korlátos R tartománya:

$$R = \{(x, y) | a < x < b, c < y < d\},$$

$$u(x, y) = g(x, y) \text{ ha } (x, y) \in S, S \text{ a tartomány határa}$$



A **centrál-differencia módszer** menete a következő:

Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot n , a $[c, d]$ intervallumot m egyenlő részre, az egyes részintervallumok hossza legyen h , illetve k .

$$x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, n$$

$$y_j = b + jk, j = 0, 1, \dots, m$$

Így a téglalap egy **rácshálózat**át kapjuk, a rácsvonalak metszéspontjai a **rácspontok**.

A 9. fejezetben megismert **centrális differencia formulákat** a belső rácspontokra alkalmazva

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2 \cdot u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2 \cdot u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2},$$

$$i = 1, 2, \dots, (n-1), j = 1, 2, \dots, (m-1)$$

3. A differenciálegyenlet - ha a képlethibákat elhanyagoljuk - közelítőleg a következő differenciaegyenletrendszerrel helyettesíthető:

$$\frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2 \cdot u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} +$$

$$\frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2 \cdot u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2} = f(x_i, y_j)$$

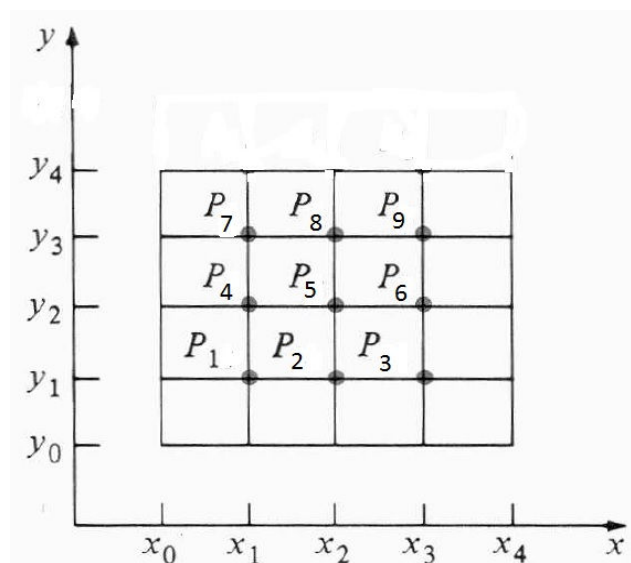
$$u(x_0, y_j) = g(x_0, y_j), u(x_n, y_j) = g(x_n, y_j), j = 0, 1, \dots, m$$

$$u(x_i, y_0) = g(x_i, y_0), u(x_i, y_m) = g(x_i, y_m), i = 1, 2, \dots, (n-1)$$

Az egyenletek azt jelentik, hogy minden belső rácspontoz tartozó függvényértéket a négy szomszédos rácspont függvényértékéből határozzuk meg.

A lineáris egyenletrendszer jobb átláthatósága érdekében minden belső rácspontoz egy sorszámot rendelünk:

$$u_l = u(i, j) = u(x_i, y_j), \text{ ahol } l = (j-1)(m-1) + i$$



Ez a felosztás a sorszámozást balról jobbra, alulról felfelé haladva adja meg.

Így az $(n-1) \cdot (m-1)$ darab belső rácspontra egy ugyanennyi egyenletből álló lineáris egyenletrendszert kapunk. Ennek megoldása adja az elliptikus differenciálegyenlet közelítő megoldását.

Írjunk **Maple** eljárást az elliptikus differenciálegyenlethez tartozó lineáris egyenletrendszer előállítására, ahol a peremfeltételt tetszőleges $g(x, y)$ függvény, az egyenlet jobb oldalát tetszőleges $f(x, y)$ kétváltozós függvény adja.

bemenő adatok: n, m, a, b, c, d, f, g

kimenő adatok: $l, e(l)$ - az l -edik egyenlet, $u(l)$ - az l -edik változó

> restart;

> elliptikus := proc (n, m, a, b, c, d, f, g)

local i, j;

global l, e, u, h, k;

for j to m-1 do

for i to n-1 do

$l := (j-1) \cdot (m-1) + i :$

$h := \frac{(b-a)}{n} : k := \frac{(d-c)}{m} :$

if $l \bmod (n-1) = 1$ then $u[l-1] := g(a, c + j \cdot k)$ fi;

if $l \bmod (n-1) = 0$ then $u[l+1] := g(b, c + j \cdot k)$ fi;

if $l-n+1 \leq 0$ then $u[l-n+1] := g(a + i \cdot h, c)$ fi;

if $l+n-1 > (n-1) \cdot (m-1)$ then $u[l+n-1] := g(a + i \cdot h, d)$ fi;

$e[l] := k^2 \cdot (u[l-1] - 2 \cdot u[l] + u[l+1]) + h^2 \cdot (u[l-(n-1)] - 2 \cdot u[l] + u[l+(n-1)]) = f(a + i \cdot h, c + j \cdot k) :$

unassign('u[l-1]', 'u[l]', 'u[l+1]', 'u[l-n+1]', 'u[l+n-1]');

od;

od;

end proc;

Megjegyzés:

Figyeljük meg a ciklusban szereplő *unassign* utasítást, aminek a hatására az u változók "elfelejtik" az aktuális értékeiket!

Az $l \bmod n$ az l -nel való osztásakor kapott maradékot jelenti.

2. Példa Írjuk fel az elliptikus egyenletet az 1. Példa esetén, majd

a; Oldjuk meg $n=4, m=4$ esetén (9 belső rácspont esete)

b; Képezzük a megoldást és ábrázoljuk az analitikus és a numerikus megoldást közös koordináta-rendszerben, ha $n=10, m=10$.

Megoldás a;

> $n := 4 : m := 4 : a := 0 : c := 0 : b := 10 : d := 10 :$
 $f := (x, y) \rightarrow 0 : g := (x, y) \rightarrow \text{piecewise}(y=d, 1, y \neq d, 0) :$

> elliptikus(n, m, a, b, c, d, f, g);

Egy rövid ciklussal írassuk ki az egyenletrendszert!

> for j to m-1 do

for i to n-1 do

$l := (j-1) \cdot (m-1) + i : \text{print}(e[l]);$

od;od;

$$-25 u_1 + \frac{25}{4} u_2 + \frac{25}{4} u_4 = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{25}{4} u_1 - 25 u_2 + \frac{25}{4} u_3 + \frac{25}{4} u_5 &= 0 \\
\frac{25}{4} u_2 - 25 u_3 + \frac{25}{4} u_6 &= 0 \\
-25 u_4 + \frac{25}{4} u_5 + \frac{25}{4} u_1 + \frac{25}{4} u_7 &= 0 \\
\frac{25}{4} u_4 - 25 u_5 + \frac{25}{4} u_6 + \frac{25}{4} u_2 + \frac{25}{4} u_8 &= 0 \\
\frac{25}{4} u_5 - 25 u_6 + \frac{25}{4} u_3 + \frac{25}{4} u_9 &= 0 \\
-25 u_7 + \frac{25}{4} u_8 + \frac{25}{4} u_4 + \frac{25}{4} u_9 &= 0 \\
\frac{25}{4} u_7 - 25 u_8 + \frac{25}{4} u_9 + \frac{25}{4} u_5 + \frac{25}{4} u_4 &= 0 \\
\frac{25}{4} u_8 - 25 u_9 + \frac{25}{4} u_6 + \frac{25}{4} u_7 &= 0
\end{aligned}$$

Képezzük az egyenletrendszer együtthatóinak és konstansainak mátrixát, majd az együtthatómátrix invertálása segítségével oldjuk meg az egyenletrendszert.

> $A, B := \text{LinearAlgebra}[\text{GenerateMatrix}]([\text{seq}(e[l], l = 1 \dots (n - 1) \cdot (m - 1))], [\text{seq}(u[l], l = 1 \dots (n - 1) \cdot (m - 1))]) :$

> $\text{megoldas} := \text{evalf}(\text{LinearAlgebra}[\text{MatrixInverse}](A).B)$

$$\text{megoldas} := \begin{bmatrix} 0.07142857143 \\ 0.09821428571 \\ 0.07142857143 \\ 0.1875000000 \\ 0.2500000000 \\ 0.1875000000 \\ 0.4285714286 \\ 0.5267857143 \\ 0.4285714286 \end{bmatrix}$$

Tehát megkaptuk a 9 belső rácspontban az $u_{\overline{f}}(i, j) = u(x_i, y_j)$ függvényértékeket.

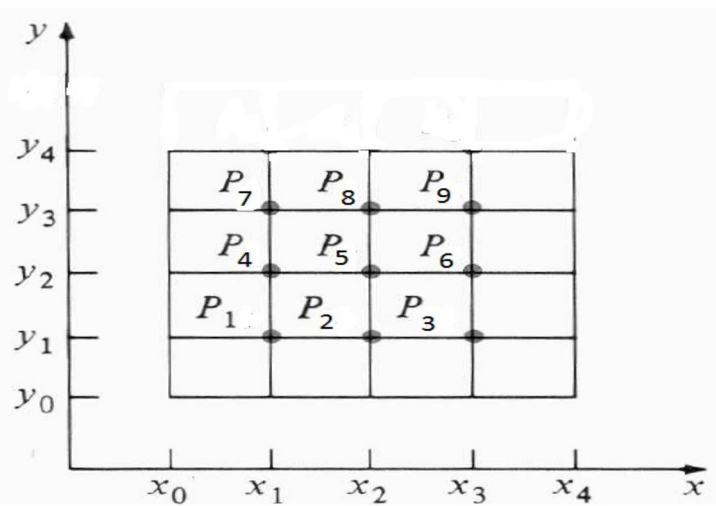
Alakítsuk vissza a kapott értékeket i -től és j -től függő kétváltozós függvényekké:

```

> for i to n - 1 do
  for j to m - 1 do
    l := (j - 1) * (m - 1) + i : u[i, j] := megoldas[l];
  od;od;

```

A következő táblázat a 9 rácspont függvényértékeit mutatja:



> $Matrix(n - 1, m - 1, [seq([seq(u[i, j], i = 1 .. (n - 1))], j = 1 .. (m - 1))])$

$$\begin{bmatrix} 0.07142857143 & 0.09821428571 & 0.07142857143 \\ 0.1875000000 & 0.2500000000 & 0.1875000000 \\ 0.4285714286 & 0.5267857143 & 0.4285714286 \end{bmatrix}$$

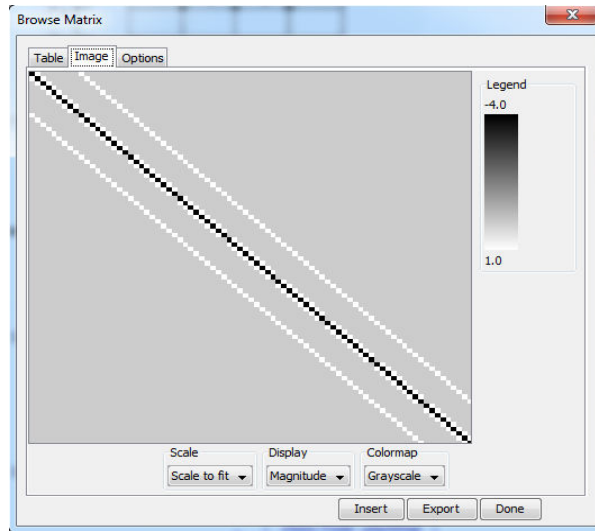
Természetesen a mátrix elemei növekvő i és j indexhez tartoznak.

Megoldás b;

> $u := 'u'; n := 10 : m := 10 :$
 > $elliptikus(n, m, a, b, c, d, f, g);$
 > $A, B := LinearAlgebra[GenerateMatrix]([seq(e[l], l = 1 .. (n - 1) \cdot (m - 1))],$
 $[seq(u[l], l = 1 .. (n - 1) \cdot (m - 1))]);$

$$A, B := \begin{bmatrix} 81 \times 81 \text{ Matrix} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran_order} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 .. 81 \text{ Vector}_{column} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran_order} \end{bmatrix}$$

Természetesen a 81×81 -es mátrix, illetve a 81 elemű oszlopvektor elemi nem íródnak ki, de az A matrix megjelítésével jól látszik a 0-tól különböző elemek elhelyezkedése.



> megoldas := evalf(LinearAlgebra[MatrixInverse](A).B)

megoldas := $\left[\begin{array}{l} 1 \dots 81 \text{ Vector}_{column} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran_order} \end{array} \right]$

Az $u[i, j]$ függvényértékek kiolvasása:

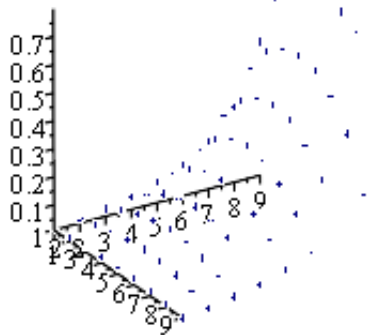
```
> for i to n - 1 do
  for j to m - 1 do
    l := (j - 1) * (m - 1) + i : u[i, j] := megoldas[l];
  od;od;
```

Az analitikus megoldáshoz tartozó sor 20. részletösszege (az 1. Példa eredménye)

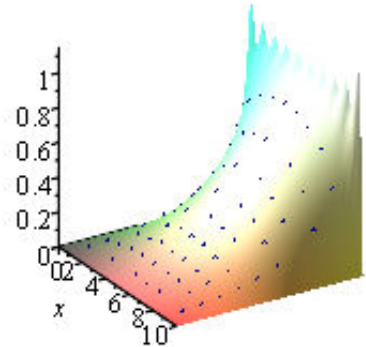
$$\begin{aligned} > \text{analitikus} := \frac{4 \sin\left(\frac{1 \pi x}{10}\right) \sinh\left(\frac{1 \pi y}{10}\right)}{\pi \sinh(\pi)} + \frac{4 \sin\left(\frac{3 \pi x}{10}\right) \sinh\left(\frac{3 \pi y}{10}\right)}{3 \pi \sinh(3 \pi)} \\ &+ \frac{4 \sin\left(\frac{1 \pi x}{2}\right) \sinh\left(\frac{1 \pi y}{2}\right)}{5 \pi \sinh(5 \pi)} + \frac{4 \sin\left(\frac{7 \pi x}{10}\right) \sinh\left(\frac{7 \pi y}{10}\right)}{7 \pi \sinh(7 \pi)} \\ &+ \frac{4 \sin\left(\frac{9 \pi x}{10}\right) \sinh\left(\frac{9 \pi y}{10}\right)}{9 \pi \sinh(9 \pi)} + \frac{4 \sin\left(\frac{11 \pi x}{10}\right) \sinh\left(\frac{11 \pi y}{10}\right)}{11 \pi \sinh(11 \pi)} \\ &+ \frac{4 \sin\left(\frac{13 \pi x}{10}\right) \sinh\left(\frac{13 \pi y}{10}\right)}{13 \pi \sinh(13 \pi)} + \frac{4 \sin\left(\frac{3 \pi x}{2}\right) \sinh\left(\frac{3 \pi y}{2}\right)}{15 \pi \sinh(15 \pi)} \\ &+ \frac{4 \sin\left(\frac{17 \pi x}{10}\right) \sinh\left(\frac{17 \pi y}{10}\right)}{17 \pi \sinh(17 \pi)} : \end{aligned}$$

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a numerikus és az analitikus megoldást. Az ábrázolandó pontok koordinátái: $[a + i \cdot h, c + k \cdot j, u[i, j]]$. A pontokat a `pointplot3d` parancs segítségével tudjuk ábrázolni.

```
> pontok
:= plots[pointplot3d]([seq(seq(
[a + i·h, c + k·j, u[i, j]], i = 1 .. (n
- 1)), j = 1 .. (m - 1))], axes
= normal, symbol = cross,
symbolsize = 20, color = blue,
orientation = [-32, 65, 0]) :
pontok;
```



```
> felulet := plot3d(analitikus, x = 0 .. 10, y
= 0 .. 10, axes = box, orientation = [
-32, 65, 0], style = surface) :
plots[display3d]([pontok, felulet])
```



Adjuk meg a 20. részletösszeghez tartozó függvényértékek és a numerikus értékek közötti eltérések maximumát:

```
> maxi := 0 :
> for i to n - 1 do
  for j to m - 1 do
    elteres
    := 
$$\frac{\text{abs}(\text{evalf}(\text{subs}(\{x = a + i \cdot h, y = c + j \cdot k\}, \text{analitikus})) - \text{evalf}(u[i, j]))}{\text{abs}(\text{evalf}(\text{subs}(\{x = a + i \cdot h, y = c + j \cdot k\}, \text{analitikus})) )}$$
,
    if evalf(elteres) > maxi then maxi := evalf(elteres) fi;
  od;
od;
> print(maxi)
```

0.02540464974

A maximális eltérés 2,5%, meglehetősen jónak mondható.

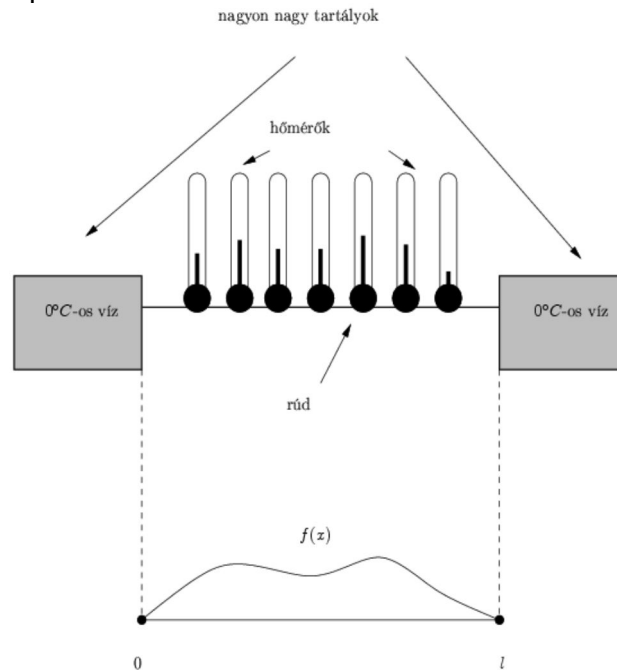
Az eljárás alkalmazható tetszőleges Poisson típusú differenciálegyenlet numerikus megoldására, ha a tartomány téglalap alakú. A nem téglalap alakú tartományokra különböző közelítő megoldások ismeretesek. Ilyenkor a peremhez általában nem tartozik rácspont. Egyik közelítés lehet, hogy a peremhez legközelebb eső pontokhoz rendelik a peremfeltételben szereplő értéket. Bonyolultabb peremfeltételekre dolgozták ki a mérnöki gyakorlatban elterjedt véges elem módszert, ahol bonyolult rácshálók segítségével közelítik az alakzatot, és így számítják az alakzat jellemző fizikai tulajdonságait.

▼ 12. 2. Parabolikus parciális differenciálegyenlet megoldása (Hővezetés)

▼ 12. 2. 1. Analitikus megoldás

3. Példa Képzeljünk el egy homogén, izotróp rudat, melynek mindkét végét 0°C -os vízzel telt hatalmas tartályokba tették. A rúd hossza l . Ugy képzeljünk, hogy a rúd az x tengelyen van, és bal

végpontja a zérus pont.



Adjuk meg az $u(x, t)$ függvényt, amely a rúd hőmérsékletét írja le az x pontban t idő múlva. Mivel a hő a melegebb helyről áramlik a hidegebb felé, ezért az ábra által szemléltetett állapot az idő múlásával változik. Egy adott x pontban a rúdnek néha magasabb, néha alacsonyabb a hőmérséklete az idő előrehaladásával. Ahhoz, hogy egy adott x pontban t idő múlva mért $u(x, t)$ hőmérsékletet meghatározhassuk, fel kell használni azt a Fouriertől származó észrevételt, hogy a hőterjedést az

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right)$$

másodrendű parciális differenciálegyenlet írja le, ahol c az anyagi minőségtől függő állandó.

A **kezdeti feltétel** a rúd hőmérséklete a $t = 0$ időpillanatban $u(x, 0) = f(x)$. (Mivel a differenciálegyenletben t szerint csak az első derivált szerepel, ezért csak egy kezdeti feltétel van.)

Megoldás

A differenciálegyenlet megoldását most is $u(x, t) = X(x)T(t)$ szorzat alakban keressük és így vezetjük vissza közös differenciálegyenletek megoldására.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) &= \left(\frac{d^2}{dx^2} X(x) \right) T(t) \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= \left(\frac{d}{dt} T(t) \right) X(x) \end{aligned}$$

Ezt az egyenlet

$$\frac{\frac{d}{dt} T(t)}{T(t)} = \frac{\alpha^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} X(x) \right)}{X(x)}$$

alakúvá válik. Az egyenlőség csak úgy lehet igaz minden x és t értékre, ha az értéke konstans.

Legyen ez -

β^2 . Így egy első és egy másodrendű, állandó együtthatós közönséges differenciálegyenlethez jutunk.

> *restart : with(DEtools) :*

>
$$de1 := \frac{d}{dt} T(t) + \beta^2 T(t) = 0 :$$

>
$$de2 := \frac{d^2}{dx^2} X(x) + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 X(x) = 0 :$$

Ezen közönséges differenciálegyenletek általános megoldása

>
$$mo1 := \text{subs}(_C1 = A, \text{dsolve}(de1, T(t)));$$

$$mo2 := \text{subs}(_C1 = B, _C2 = C, \text{dsolve}(de2, X(x)))$$

$$mo1 := T(t) = A e^{-\beta^2 t}$$

$$mo2 := X(x) = B \sin\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right) + C \cos\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)$$

Így a parabolikus típusú parciális differenciálegyenlet általános megoldása

> $mo := u(x, t) = \text{rhs}(mo1) \text{ rhs}(mo2)$

$$mo := u(x, t) = A e^{-\beta^2 t} \left(B \sin\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right) + C \cos\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right) \right)$$

Itt még A, B, C, β ismeretlenek, értéküket a kezdeti és a peremfeltételekből határozzuk meg. Peremfeltételek felhasználásával:

>
$$u(0, t) := 0 :$$

> $u(0, t) = \text{evalf}(\text{subs}(x=0, \text{rhs}(mo)))$

$$0 = 1. A e^{-1. \beta^2 t} C$$

Ez pedig csak úgy lehet igaz minden t -re ha

> $C := \text{solve}(\%, C)$

$$C := 0.$$

>
$$u(l, t) := 0 :$$

> $u(l, t) = \text{expand}(\text{evalf}(\text{subs}(x=l, \text{rhs}(mo))))$

$$0 = A e^{-1. \beta^2 t} B \sin\left(\frac{\beta l}{\alpha}\right)$$

AB nem lehet 0, mert akkor $u(x, t)$ azonosan 0 lenne, így csak $\sin\left(\frac{\beta l}{\alpha}\right)$ lehet 0. Ez végtelen sok megoldást ad β -ra. Feltéve, hogy n egész szám:

> *assume(n, posint) :*

>
$$\frac{\beta_n l}{\alpha} = n \pi :$$

> $\beta_n := \text{solve}(\%, \beta_n)$

$$\beta_{n\sim} := \frac{n\sim \pi \alpha}{l}$$

Jelöljük az AB szorzatot a -val. Így n értékétől függően a megoldás:

>
$$u_n(x, t) = a_n \sin(\beta[n] x) e^{-\beta_n^2 t}$$

$$u_{n\sim}(x, t) = a_{n\sim} \sin\left(\frac{n\sim \pi \alpha x}{l}\right) e^{-\frac{n\sim^2 \pi^2 \alpha^2 t}{l^2}}$$

A lineáris differenciálegyenlet megoldásainak lineáris kombinációi is megoldások. Így a kezdeti feltételnek megfelelő megoldásokat

$$> \text{megoldas} := u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{rhs}(\%)$$

$$\text{megoldas} := u(x, t) = \sum_{n\sim=1}^{\infty} a_{n\sim} \sin\left(\frac{n\sim \pi \alpha x}{l}\right) e^{-\frac{n\sim^2 \pi^2 \alpha^2 t}{l^2}}$$

alakban keressük. A feladat mostmár a kezdeti feltételből a_n -ek meghatározása. A kezdeti feltétel

$$> u(x, 0) := f(x) :$$

$$> u(x, 0) = \text{eval}(\text{subs}(t=0, \text{rhs}(\text{'\%'\%'\%'})))$$

$$f(x) = \sum_{n\sim=1}^{\infty} a_{n\sim} \sin\left(\frac{n\sim \pi \alpha x}{l}\right)$$

A jobb oldalon szereplő a_n együtthatók az $f(x)$ függvény tiszta szinuszos Fourier sorának együtthatói, ha $f(x)$ értelmezési tartományát kiterjesztjük úgy, hogy $2l$ szerint periodikus, páratlan függvény legyen. Így az általános megoldásban szereplő konstansok már meghatározottak, vagyis megkaptuk az adott kezdeti és peremfeltételeknek megfelelő partikuláris megoldást.

4. Példa Oldjuk meg a hővezetés egyenletét, ha $l = 10$ cm $\alpha = 1$, a $t=0$ időpontban az egész rúd hőmérséklete 100°C , a rúd két vége olvadó jégbe merül, vagyis 0°C . Milyen függvény írja le a rúd hűlési folyamatát?

Megoldás

$$> l := 10 : \alpha := 1 : u(x, 0) := 100 : u(0, t) := 0 : u(1, t) := 0 : \text{megoldas},$$

$$u(x, t) = \sum_{n\sim=1}^{\infty} a_{n\sim} \sin\left(\frac{1}{10} n\sim \pi x\right) e^{-\frac{1}{100} n\sim^2 \pi^2 t}$$

$$> f(x) = \text{eval}(\text{subs}(t=0, \text{rhs}(\text{megoldas}))))$$

$$f(x) = \sum_{n\sim=1}^{\infty} a_{n\sim} \sin\left(\frac{1}{10} n\sim \pi x\right)$$

Legyen $f(x)$ $2l$ szerint periodikus, páratlan függvény:

$$> f := x \rightarrow \text{piecewise}(-1 < x \text{ and } x < 0, -u(x, 0), 0 < x \text{ and } x < 1, u(x, 0)) :$$

Hozzuk létre az együtthatókat, a_n az n változó függvénye.

$$> a := n \rightarrow \frac{2 \left(\int_0^l u(x, 0) \cdot \sin\left(\frac{n \pi x}{l}\right) dx \right)}{l} :$$

Írjuk föl először a Fourier-sor 20-edik részletösszegét:

$$\begin{aligned}
 & \text{> } m := 20 : F_{sor} := \sum_{n=1}^m a(n) \sin\left(\frac{n \pi x}{l}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2 t}{l^2}} \\
 & F_{sor} := \sum_{n=1}^{20} \left(-\frac{200 (-1 + (-1)^{n-1}) \sin\left(\frac{1}{10} n \pi x\right) e^{-\frac{1}{100} n^2 \pi^2 t}}{n \pi} \right)
 \end{aligned}$$

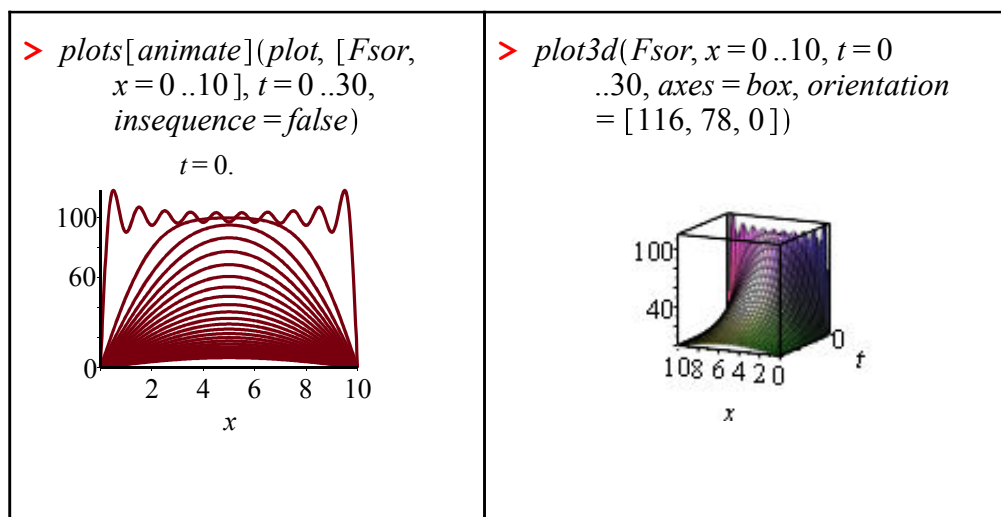
Megkaphatjuk a Fourier-együtthatókat is:

$$\text{> } a[n] := a(n)$$

$$a_{n-1} := -\frac{200 (-1 + (-1)^{n-1})}{n \pi}$$

Ebből is látszik, hogy $a(n)$ csak páratlan n esetén különbözik 0-tól. Tehát a folyamatot leíró helytől és időtől függő függvény:

$$\begin{aligned}
 & \text{> } u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a[n] \sin\left(\frac{n \pi x}{l}\right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2 t}{l^2}} \\
 & u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{200 (-1 + (-1)^{n-1}) \sin\left(\frac{1}{10} n \pi x\right) e^{-\frac{1}{100} n^2 \pi^2 t}}{n \pi} \right)
 \end{aligned}$$



▼ 12. 2. 2. Numerikus megoldás

Ismét a véges differenciák módszerét alkalmazzuk. A közelítéshez most is a rácshálót készítünk, csak most a függőleges tengelyre az időt mérjük fel. (Így a tartomány biztosan téglalap alakú, hiszen a vízszintes tengelyhez egy hosszúság, a függőleges tengelyhez pedig egy - végtelen nagyságú - időtartomány tartozik.)

Osszuk fel az x tengelyen lévő $[0, l]$ intervallumot n részre, a t tengelyen pedig az osztáspontok legyenek k lépésközzönként.

$$x_i = ih, i = 0, 1, \dots, n$$

$$t_j = jk, j = 0, 2, \dots$$

A **centrális differencia formulákat** alkalmazva az egyenlet közelítőleg

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_{j-1}))}{2 \cdot k} - \alpha^2 \cdot \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2 \cdot u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} = 0$$

alakúvá válik.

Vezessük be a

$\lambda = \alpha \cdot \frac{k}{h^2}$ jelölést. Így az egyenlet

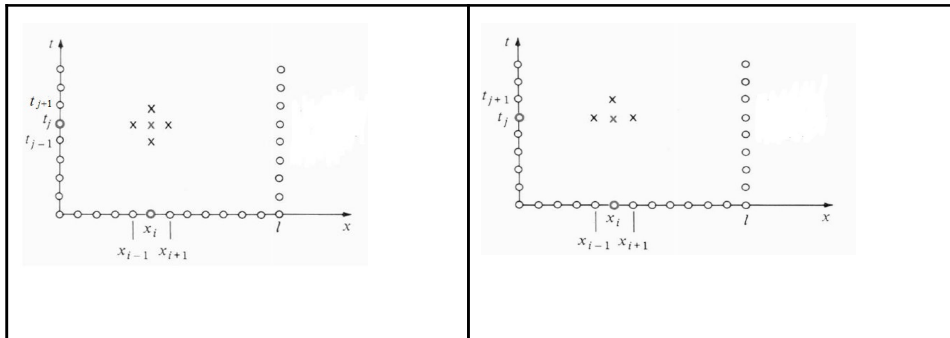
$$u(x_i, t_{j+1}) = 2 \cdot \lambda \cdot (u(x_{i+1}, t_j) - 2 \cdot u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)) + u(x_i, t_{j-1}), \quad i = 1, 2, \dots, (n-1),$$

$$j = 1, 2, \dots$$

alakú. Vagyis a $j+1$. időpillanatbeli értéket a j . és a $j-1$. időpontbeli értékből számítjuk ki. Tudjuk, hogy $u(x_i, 0) = f(x_i)$, de módszer alkalmazásához tudnunk kellene az

$u(x_i, t_1) = u(x_i, k)$ értékeket.

Ennek kiküszöbölésére a t szerinti első deriváltat a j . és a $j+1$. időpillanatbeli értékek felhasználásával közelítjük.



Az egyenlet közelítése így

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} - \alpha \cdot \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2 \cdot u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} = 0$$

alakú.

Tehát

$$u(x_i, t_{j+1}) = (1 - 2 \cdot \lambda) \cdot u(x_i, t_j) + \lambda \cdot (u(x_{i+1}, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)),$$

$$i = 1, 2, \dots, (n-1), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$u(x_i, 0) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, (n-1), \quad u(0, t) = u(l, t) = 0$$

Ha az így létrehozott egyenleteket $j = 1, 2, \dots, (m-1)$ időpontra írjuk fel, az így kapott egyenlerendszerhez az

$$A = \begin{bmatrix} (1 - 2 \cdot \lambda) & \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \lambda & (1 - 2 \cdot \lambda) & \lambda & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

tridiagonális mátrix tartozik. Amint azt a 4. fejezetben láttuk, egy egyenletrendszer jól kondicionált (stabil), ha kondíciószáma 1-hez közeli. (m növelésével a hatvány normája nem nő.)

Vizsgáljuk meg az A mátrix normáját 5×5 -ös mátrix esetén..

> restart; with(LinearAlgebra) :

$A := \text{BandMatrix}([\lambda, 1 - 2 \cdot \lambda, \lambda], 1, 5, \text{storage} = \text{rectangular}) :$

> $\text{Norma} := \text{MatrixNorm}(A)$

$$\text{Norma} := 2 |\lambda| + |-1 + 2 \lambda|$$

Tudjuk, hogy λ pozitív. Ha $\lambda \leq \frac{1}{2}$, akkor az a mátrix normája 1, ha $\lambda > \frac{1}{2}$, a norma

$4 \cdot \lambda - 1 > 1$. Bebizonyítható, hogy a rendszer csak akkor stabil, vagyis a kondíciós szám 1-hez közeli, ha $\lambda = \alpha \cdot \frac{k}{h^2} < \frac{1}{2}$. Tehát az osztáspontoknál vigyázni kell arra, hogy $\lambda = \alpha \cdot \frac{k}{h^2} < \frac{1}{2}$,

vagyis $2 \cdot \alpha \cdot k < h^2$ legyen.

A parabolikus típusú differenciálegyenlet numerikus megoldását a Maple tartalmazza.

5. Példa Oldjuk meg a 4. Példa egyenletét a Maple beépített modulja segítségével. A lépésközöket a stabilitási feltételnek megfelelően válasszuk.

Megoldás

> $\text{ho_egyenlet} := \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) :$

> $l := 10 : \alpha := 1 :$

> $\text{feltetelek} := \{u(x, 0) = 100, u(0, t) = 0, u(1, t) = 0\} :$

> $k := 0.4 : h := 1 : \text{is} \left(\frac{\alpha k}{h^2} < \frac{1}{2} \right) ;$
true

> $\text{megoldas} := \text{pdsolve}(\text{ho_egyenlet}, \text{feltetelek}, \text{numeric}, \text{timestep} = k, \text{spacestep} = h) ;$

megoldas := module() export plot, plot3d, animate, value, settings; ... end module

A megoldás keresésekor definiáltuk a differenciálegyenletet, a kezdeti és a peremfeltételeket, a megoldás módját, az idő (k) és a hely (h) lépésközöket. A futtatás eredményeként egy modult kapunk, amely a megoldás különböző formáit (ábrázolás síkban, térben, értékek, stb.) tartalmazza.

Adott helyen és időpontban a hőmérsékletértékeket kiolvashatjuk a *value* opció segítségével.

> $\text{Homerseklet_num} := \text{megoldas}.\text{value}() ; \text{Homerseklet_num}(0.5, 3) ;$

Homerseklet_num := proc() ... end proc

[x=0.5, t=3., u(x, t) = 16.9395004551337]

Hasonlítsuk ezt össze az analitikus megoldás 20, részletösszegeként kapott megoldással:

>
$$F_{\text{sor}} := \sum_{n=1}^{20} \left(- \frac{200 (-1 + (-1)^{n-1}) \sin\left(\frac{1}{10} n \pi x\right) e^{-\frac{1}{100} n^2 \pi^2 t}}{n \pi} \right) :$$

> $\text{Homerseklet_sor} := \text{evalf}\left(\text{subs}(\{x=0.5, t=3\}, F_{\text{sor}}), 13\right) ; \text{elteres}$
 $:= \frac{\text{abs}(\text{Homerseklet_sor} - \text{rhs}(\text{Homerseklet_num}(0.5, 3)[3]))}{\text{Homerseklet_sor}}$

Homerseklet_sor := F_{sor}

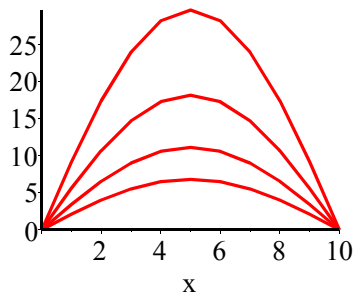
elteres := $\frac{|F_{\text{sor}} - 16.9395004551337|}{F_{\text{sor}}}$

Az eltérés 5%. Nézzük mindezt ábrázolással:

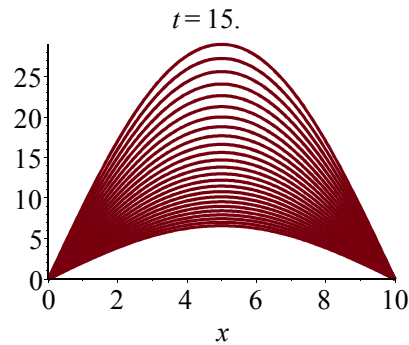
> $\text{plots}[\text{display}](\text{seq}(\text{megoldas}$

> $\text{plots}[\text{animate}](\text{plot}, [F_{\text{sor}}, x=0$

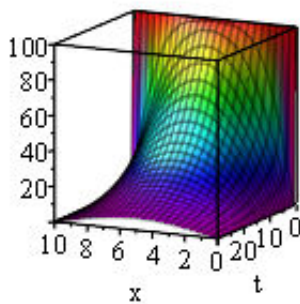
```
:-plot(u(x,t), t=5..i), i  
=3..6) ]];
```



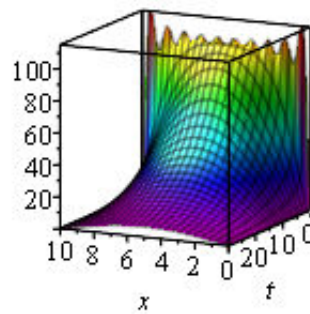
```
..10], t=15..30, insequence  
=false)
```



> megoldas: `plot3d(u(x,t), t=0
..30, shading=zhue, axes
=boxed, orientation
=[116, 78, 0])`



> `plot3d(Fsor, x=0..10, t=0..30,
axes=box, shading=zhue,
orientation=[116, 78, 0])`



6. Példa Oldjuk meg a hővezetés egyenletét, ha a feltételek:

a.; $\alpha = \frac{1}{16}$, $l=2$, $u(x, 0) = 10 \cdot x \cdot (2 - x)$, $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$. Hol lesz a hőmérséklet értéke a $t_0=1$ sec időpillanatban 5 Celsius fok?

b; $\alpha = 1$, $l=1$, $u(x, 0) = 20 \cdot \sin(\pi \cdot x)$, $u(0, t) = 10$, $u(1, t) = 10$. Melyik az az időpillanat, amelyben az $x = \frac{1}{2}$ helyen a hőmérséklet értéke 10 fok?

Megoldás a;

> $ho_egyenlet := \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) :$

> $l := 2 : \alpha := \frac{1}{16} :$

> $feltetelek := \{u(x, 0) = 10 \cdot x \cdot (2 - x), u(0, t) = 0, u(1, t) = 0\} :$

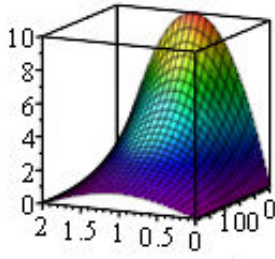
> $k := 0.05 : h := 0.1 : is \left(\frac{\alpha k}{h^2} < \frac{1}{2} \right) ;$
true

> `megoldas := pdsolve(ho_egyenlet, feltetelek, numeric, timestep=0.05, spacestep=0.5) :`

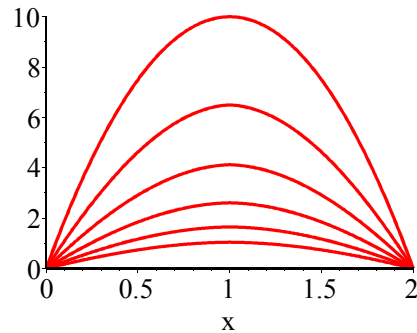
>

>

```
> megoldas:-plot3d(u(x, t), t=0
..250, shading=zhue, axes
=boxed, orientation
=[116, 78, 0])
```



```
> plots[display]([seq(megoldas:-
plot(u(x, t), t=50·i, numpoints
=300), i=0..5) ])
```



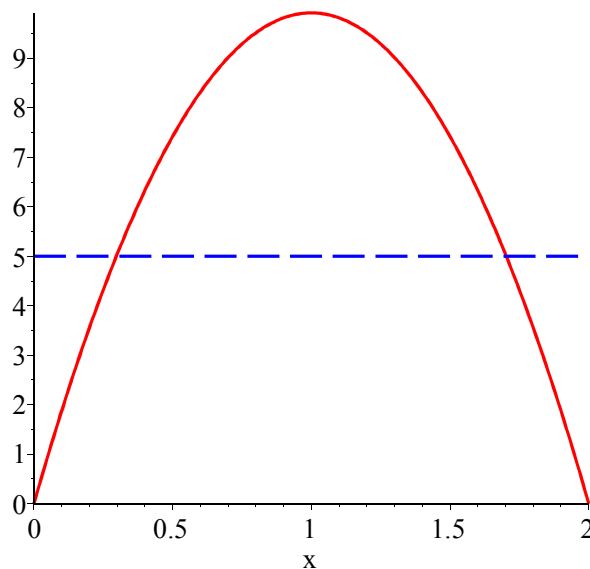
Az `output = listprocedure` opcióval lehetőség van annak kiolvasására, egy adott t_0 időpillanatban hol vesz fel $u(x, t_0)$ egy előre megadott értéket.

```
> t0 := 1 : megoldas:-value(t=1, output=listprocedure);
[x=proc(x) ... end proc, t=1., u(x, t)=proc(x) ... end proc]
```

```
> u_ertek := rhs(op(3, %))
u_ertek := proc(x) ... end proc
```

```
> fsolve(u_ertek(x)=5, x=0..1); fsolve(u_ertek(x)=5, x=1..2)
0.2971214960
1.702878504
```

```
> with(plots) : a := megoldas:-plot(u(x, t), t=1, numpoints=300) : b
:= plottools[line]([0, 5], [2, 5], color=blue, linestyle=dash) : display([a, b])
```



Az ábrából is látszik hogy két olyan hely van, ahol az adott időpillanatban a hőmérséklet értéke egy előre megadott érték.

Megoldás b;

```

> restart; ho_egyenlet :=  $\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) :$ 
> l := 1 :  $\alpha := 1 :$ 
> feltetelek := {  $u(x, 0) = 20 \cdot \sin(\pi \cdot x) \cdot (1 + \cos(\pi \cdot x))$ ,  $u(0, t) = 0$ ,  $u(1, t) = 0$  } :
> k := 0.01 : h := 0.25 : is  $\left( \frac{\alpha k}{h^2} < \frac{1}{2} \right) ;$ 

```

true

```

> megoldas := pdsolve(ho_egyenlet, feltetelek, numeric, timestep=k, spacestep=h) :

```

A feladat megoldásához egy kis ciklust írunk, ami közelítőleg kiszámítja az első olyan időpillanatot, amikor a hőmérséklet értéke adott hibánál kisebb hibával tér el az előre megadott hőmérséklet értékétől.

```

> fok := 100 : elteres := 100 :
  for i from 1 to 100000 while elteres > 0.01 do
    fok := rhs( ido( x0,  $\frac{i}{30000}$  ) [3] ) :
    elteres := abs( fok - 5 ) :
  end: t0 := evalf(  $\frac{i-1}{30000}$  ); homerseklet := fok;

```

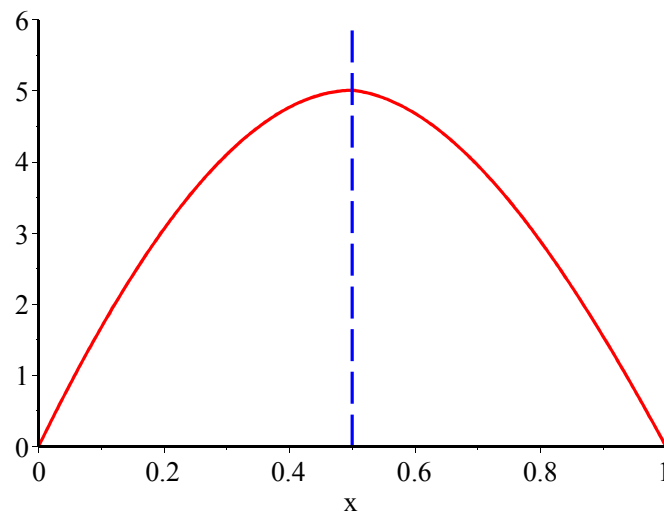
t0 := 0.1476000000

homerseklet := 5.00921081819524

```

> with(plots) : a := megoldas:-plot(u(x, t), t=t0, numpoints=300) : b := pointplot([0.5,
0.5], [0, 6], color=blue, connect=true, linestyle=dash) : display([a, b])

```



```

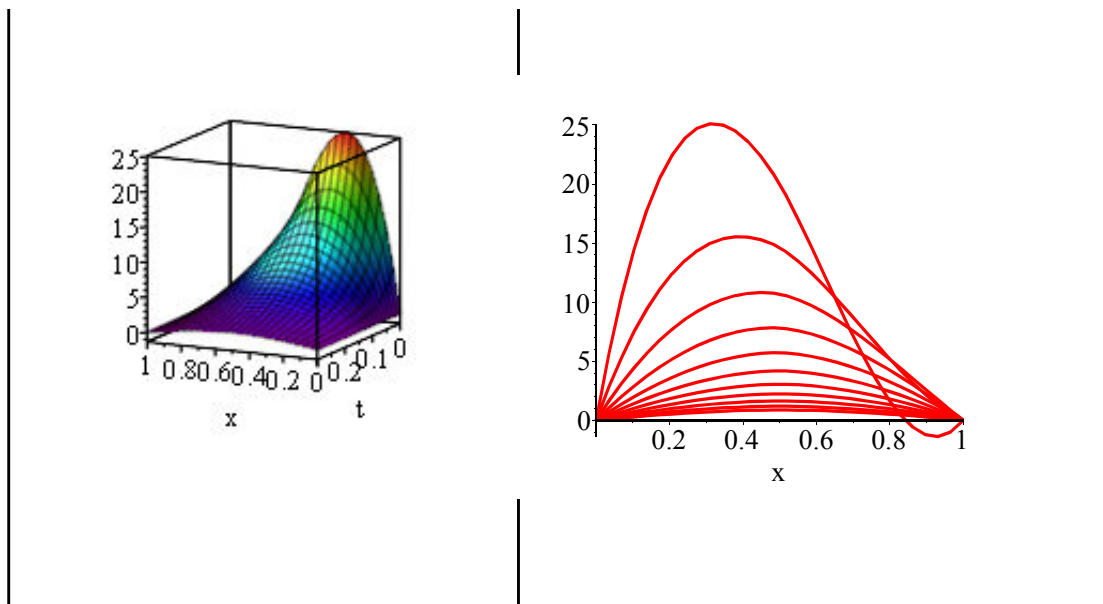
> megoldas:-plot3d(u(x, t), t=0
..0.3, shading=zhue, axes
=boxed, orientation
=[116, 78, 0])

```

```

> plots[display]([ seq( megoldas:-
plot( u(x, t), t =  $\frac{i}{30}$ , numpoints
= 30 ), i = 0 .. 10 ) ] )

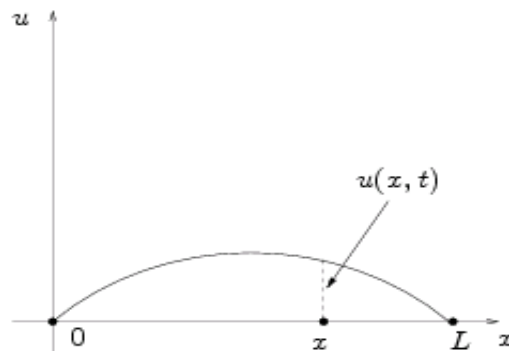
```



▼ 12. 3. Hiperbolikus parciális differenciálegyenlet megoldása (Rezgő húr)

▼ 12. 3. 1. Analitikus megoldás

7. Példa Tekintsük az L hosszúságú tökéletesen rugalmas húrt. Helyezzük ezt a húrt az x -tengely $[0, L]$ szakaszára és mozdítsuk ki az x -tengelyre merőlegesen.



A húr az x tengelyre merőlegesen az (x, u) síkban mozog.

Azt, hogy a húr egy x abszcisszájú pontja hol van t időmúlva az $u(x, t)$ függvény adja meg. A rezgő húr mozgását tehát meghatároztuk, ha ezt az ismeretlen függvényt megtaláljuk. Amint az fizikai megfontolásokból adódik, a keresett függvény kielégíti a

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right)$$

hiperbolikus parciális differenciálegyenletet, ahol α ismert állandó.

A keresett partikuláris megoldás két kezdeti és két peremfeltételt kell megadni.

Kezdeti feltételek: a $t=0$ időpillanatban $u(x, 0) = f(x)$, a húr kezdeti alakját leíró függvény

$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = g(x)$, a húr pontjainak kezdeti sebességét leíró függvény.

Kerületi vagy peremfeltételek: a rúd két végpontjának helyzete $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$ vagyis a

rúd két vége rögzített.

Megoldás

A differenciálegyenlet megoldását most is $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ alakban keressük.

$$\frac{\frac{d^2}{dt^2} T(t)}{T(t)} = \frac{\alpha^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} X(x) \right)}{X(x)}$$

A konstans ismét legyen $-\beta^2$.

> *restart : with(DEtools) :*

>
$$de1 := \frac{d^2}{dt^2} T(t) + \beta^2 T(t) = 0 :$$

>
$$de2 := \frac{d^2}{dx^2} X(x) + \frac{\beta^2 X(x)}{\alpha^2} = 0 :$$

> $mo1 := \text{subs}(\{ _C1 = A, _C2 = B \}, \text{dsolve}(de1, T(t))) ;$
 $mo2 := \text{subs}(\{ _C1 = C, _C2 = E \}, \text{dsolve}(de2, X(x)))$

$$mo1 := T(t) = A \sin(\beta t) + B \cos(\beta t)$$

$$mo2 := X(x) = C \sin\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right) + E \cos\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)$$

Így a differenciálegyenlet általános megoldása:

> $mo := u(x, t) = \text{rhs}(mo1) \text{ rhs}(mo2)$

$$mo := u(x, t) = (A \sin(\beta t) + B \cos(\beta t)) \left(C \sin\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right) + E \cos\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right) \right)$$

Most A, B, C, E, β ismeretlenek, értéküket a kezdeti és a peremfeltételekből határozzuk meg.

A peremfeltételekből:

>
$$u(0, t) := 0 :$$

>
$$u(0, t) = \text{evalf}(\text{subs}(x=0, \text{rhs}(mo)))$$

$$0 = 1. (A \sin(\beta t) + B \cos(\beta t)) E$$

Ez pedig csak úgy lehet igaz minden t -re ha

>
$$E := \text{solve}(\%, E)$$

$$E := 0.$$

>
$$u(L, t) := 0 :$$

>
$$u(L, t) = \text{evalf}(\text{subs}(x=L, \text{rhs}(mo)))$$

$$0 = (A \sin(\beta t) + B \cos(\beta t)) C \sin\left(\frac{\beta L}{\alpha}\right)$$

C nem lehet 0, mert akkor $u(x, t)$ azonosan 0 lenne, így csak $\sin\left(\frac{\beta L}{\alpha}\right)$ lehet 0. Feltéve, hogy

n pozitív egész szám:

>
$$\text{assume}(n, \text{posint}) :$$

>
$$\frac{\beta_n L}{\alpha} = n \pi :$$

>
$$\beta_n := \text{solve}(\%, \beta_n)$$

$$\beta_{n\sim} := \frac{n\sim \pi \alpha}{L}$$

Így az n értékétől függően a megoldás:

$$> \quad u_n(x, t) = \left(A_n \sin(\beta_n t) + B_n \cos(\beta_n t) \right) C_n \sin\left(\frac{\beta_n x}{\alpha}\right) :$$

A lineáris differenciálegyenlet megoldásainak lineáris kombinációi is megoldások. Így a kezdeti feltételnek megfelelő megoldásokat

$$> \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{expand}(\text{rhs}(\%))$$

$$u(x, t) = \sum_{n\sim=1}^{\infty} \left(C_{n\sim} \sin\left(\frac{n\sim \pi x}{L}\right) A_{n\sim} \sin\left(\frac{n\sim \pi \alpha t}{L}\right) + C_{n\sim} \sin\left(\frac{n\sim \pi x}{L}\right) B_{n\sim} \cos\left(\frac{n\sim \pi \alpha t}{L}\right) \right)$$

alakban keressük. Legyen $a_{n\sim} := C_{n\sim} A_{n\sim}$ $b_{n\sim} := C_{n\sim} B_{n\sim}$

$$> \quad \text{megoldas} := u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n \pi \alpha t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n \pi \alpha t}{L}\right) \right) :$$

A feladat most már a **kezdeti feltételekből** a_n és b_n meghatározása.

$$> \quad u(x, 0) := f(x) :$$

$$> \quad u(x, 0) = \text{eval}(\text{subs}(t=0, \text{rhs}(\text{megoldas})))$$

$$f(x) = \sum_{n\sim=1}^{\infty} b_{n\sim} \sin\left(\frac{n\sim \pi x}{L}\right)$$

$$> \quad g(x) = \text{eval}\left(\text{subs}\left(t=0, \frac{\partial}{\partial t} \text{rhs}(\text{megoldas})\right)\right)$$

$$g(x) = \sum_{n\sim=1}^{\infty} \frac{a_{n\sim} \sin\left(\frac{n\sim \pi x}{L}\right) n\sim \pi \alpha}{L}$$

A b_n együtthatók az $f(x)$ függvény tiszta szinuszos Fourier sorának együtthatói, ha $f(x)$ értelmezési tartományát kiterjesztjük úgy, hogy $2L$ szerint periodikus, páratlan függvény legyen. Az a_n együtthatók pedig a $g(x)$ függvény tiszta szinuszos Fourier sorának együtthatóiból számítható, ha $g(x)$ értelmezési tartományát kiterjesztjük úgy, hogy $2L$ szerint periodikus, páratlan függvény legyen. Így az általános megoldásban szereplő konstansok már meghatározottak, vagyis megkaptuk az adott kezdeti és peremfeltételeknek megfelelő partikuláris megoldást.

8. Példa Vizsgáljuk meg, hogy hogyan fog mozogni a regő húr, ha középen kifeszítjük, majd elengedjük anélkül, hogy bármely pontjának is kezdősebességet adnánk. Legyen a húr hossz $L =$

π , középen a kitérés legyen $\delta = \frac{\pi}{2}$.

$$> \quad L := \pi : \alpha := 1 : u(0, t) := 0 : u(L, t) := 0 :$$

> $f_kezd := \text{piecewise}\left(0 \leq x \text{ and } x < \frac{\pi}{2}, x, \frac{\pi}{2} \leq x \text{ and } x < \pi, \pi - x\right) : g := 0 :$

> $\text{plot}(f_kezd, x = 0 .. \pi, \text{thickness} = 2, \text{title} = \text{"A húr kezdeti alakja"})$



> megoldas

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin(n x) \sin(n t) + b_n \sin(n x) \cos(n t))$$

> $f(x) = \text{eval}(\text{subs}(t = 0, \text{rhs}(\text{megoldas})))$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n x)$$

> $g(x) = \text{eval}\left(\text{subs}\left(t = 0, \frac{\partial}{\partial t} \text{rhs}(\text{megoldas})\right)\right)$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n x) n$$

Ez utóbbi egyenlet úgy teljesül, ha

> $a_n := 0 :$

Legyen f $2L$ szerint periodikus és a $[-L, L]$ intervallumon, valamint a $[0, \pi]$ intervallumon az értéke legyen a húr kezdeti alakját leíró f_kezd függvény:

> $f := x \rightarrow \text{piecewise}(-\pi/2 \leq x \text{ and } x < \pi/2, x, \pi/2 \leq x \text{ and } x < \pi, \pi - x, -\pi < x \text{ and } x < -\pi/2, -\pi - x) :$

Írjuk fel b_n együtthatókat n függvényeként:

>
$$b := n \rightarrow \frac{2 \left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x \sin(n x) dx + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} (\pi - x) \sin(n x) dx \right)}{\pi} :$$

Írjuk fel az $f(x)$ függvény Fourier sorának 20. részletösszegét.

>
$$m := 20 : F_{\text{sor}} := \text{normal}\left(\sum_{n=1}^m b(n) \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right)\right)$$

$$F_{\text{sor}} := \sum_{n=1}^{20} \frac{4 \sin\left(\frac{1}{2} \pi n\right) \sin(n x)}{n^2 \pi}$$

> $\text{value}(F_{\text{sor}})$

$$\frac{4 \sin(x)}{\pi} - \frac{4}{9} \frac{\sin(3 x)}{\pi} + \frac{4}{25} \frac{\sin(5 x)}{\pi} - \frac{4}{49} \frac{\sin(7 x)}{\pi} + \frac{4}{81} \frac{\sin(9 x)}{\pi}$$

$$-\frac{4}{121} \frac{\sin(11x)}{\pi} + \frac{4}{169} \frac{\sin(13x)}{\pi} - \frac{4}{225} \frac{\sin(15x)}{\pi} + \frac{4}{289} \frac{\sin(17x)}{\pi} - \frac{4}{361} \frac{\sin(19x)}{\pi}$$

A húr rezgéseit leíró kétváltozós függvény tehát

> $b[n] := b(n)$:

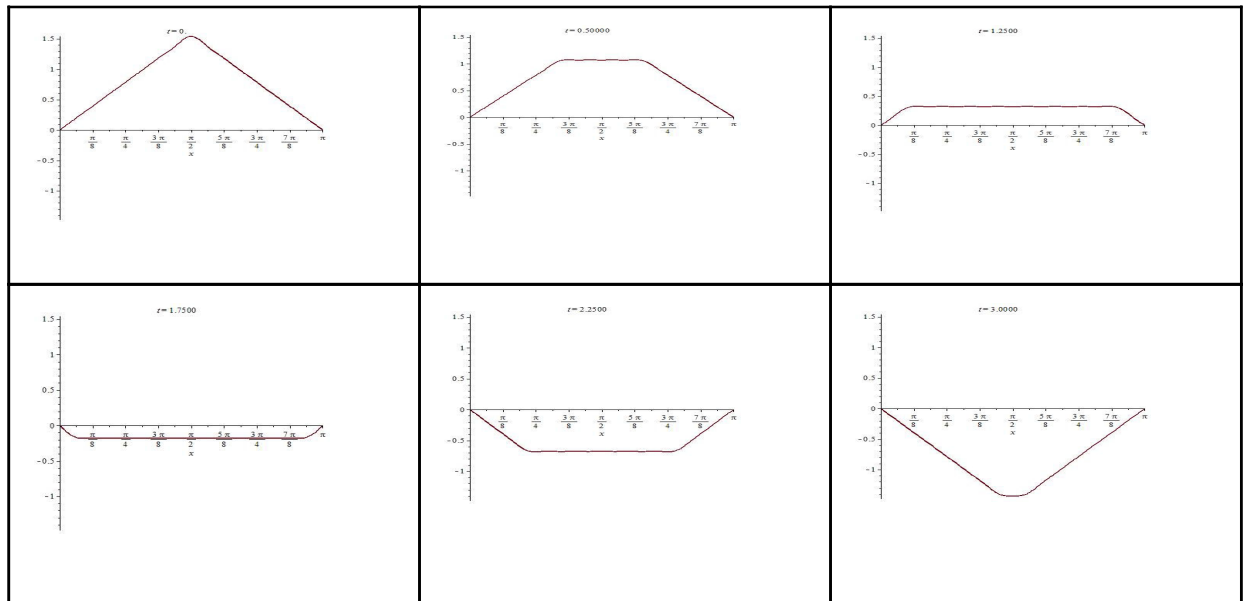
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a[n] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi \alpha t}{L}\right) + b[n] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi \alpha t}{L}\right) \right)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left(\left(-\frac{2 \sin\left(\frac{1}{2} \pi n\right) + \cos\left(\frac{1}{2} \pi n\right) n\pi}{n^2} + \frac{\cos\left(\frac{1}{2} \pi n\right) n\pi + 2 \sin\left(\frac{1}{2} \pi n\right)}{n^2} \right) \sin(n x) \cos(n t) \right)$$

A 20. részletösszeg

> $F := \sum_{n=1}^m \left(a[n] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi \alpha t}{L}\right) + b[n] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi \alpha t}{L}\right) \right) :$

> $\text{plots}[\text{animate}](\text{plot}, [F, x=0..L], t=0..6) :$



▼ 12. 3. 2. Numerikus megoldás

Ismét a

$$x_i = ih, i = 0, 1, \dots, n$$

$$t_j = jk, j = 0, 2, \dots$$

felosztást használjuk. A centrális differencia formulát használva

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2 \cdot u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{k^2} - \alpha^2 \cdot \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2 \cdot u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} = 0$$

alakú közelítő egyenletet kapunk. Legyen most $\lambda = \alpha \cdot \frac{k}{h}$. Ekkor

$$u(x_i, t_{j+1}) = 2 \cdot (1 - \lambda^2) \cdot u(x_i, t_j) + \lambda^2 \cdot (u(x_{i+1}, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)) - u(x_i, t_{j-1}),$$

$$i = 1, 2, \dots, (n-1), j = 1, 2, \dots$$

$$u(x_0, t_j) = u(0, t_j) = 0, \quad u(x_n, t_j) = u(1, t_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$u(x_i, t_0) = u(x_i, 0) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, (n-1)$$

Így

$$\begin{bmatrix} u(x_1, t_{j+1}) \\ u(x_2, t_{j+1}) \\ \vdots \\ u(x_{n-1}, t_{j+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (1 - \lambda^2) & \lambda^2 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda^2 & 2 \cdot (1 - \lambda^2) & \lambda^2 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2 \cdot (1 - \lambda^2) & \dots & \lambda^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda^2 & \lambda^2 & \dots & 2 \cdot (1 - \lambda^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(x_1, t_j) \\ u(x_2, t_j) \\ \vdots \\ u(x_{n-1}, t_j) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u(x_1, t_{j-1}) \\ u(x_2, t_{j-1}) \\ \vdots \\ u(x_{n-1}, t_{j-1}) \end{bmatrix}$$

alakú lineáris egyenletrendszerhez jutunk, melynek segítségével a $j+1$. időpillanatbeli függvényértékeket a j . és a $j-1$. pillanatbeli értékekből tudjuk meghatározni. A $j=0$ -hoz tartozó értékeket ismerjük, a $j=1$ időpillanatbeli értékeket a

$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = g(x)$ kezdeti feltételből határozzuk meg. Ehhez az első deriváltat ismét közelítsük a differenciahányadosával.

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_i, 0) = \frac{u(x_i, t_1) - u(x_i, 0)}{k}$$

Ezt megoldva $u(x_i, t_1)$ -re kapjuk, hogy

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + k \cdot \frac{\partial}{\partial t} u(x_i, 0),$$

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + k \cdot g(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, (n-1)$$

A lineáris egyenletrendszer stabilitásának feltételei vannak. Számítsuk ki az A együtthatómátrix normáját 5×5 -ös mátrix esetén.

> restart; with(LinearAlgebra) :

$$A := \text{BandMatrix}([\lambda^2, 2 \cdot (1 - \lambda^2), \lambda^2], 1, 5, \text{storage} = \text{rectangular}) : \text{Norma} \\ := \text{MatrixNorm}(A)$$

$$\text{Norma} := 2 |\lambda|^2 + |-2 + 2 \lambda^2|$$

Tudjuk, hogy λ pozitív. Ha $\lambda \leq 1$, akkor az a mátrix normája 2, ha $\lambda > 1$, a norma $4 \cdot \lambda^2 - 2 > 2$. Bebizonyítható, hogy az egyenletrendszer akkor stabil, ha $\lambda \leq 1$. Tehát az osztáspontoknál vigyázni kell arra, hogy $\lambda = \alpha \cdot \frac{k}{h} \leq 1$, vagyis $\alpha \cdot k < h$ legyen.

A hiperbolikus típusú differenciálegyenlet is megoldható Maple segítségével.

9. Példa Oldjuk meg a 8. Példa feladatát a Maple beépített algoritmusával.

```
> hur_egyenlet :=  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) :$ 
> l := Pi :  $\alpha := 1 :$ 
> feltetelek1 := {D2(u)(x, 0) = 0, u(0, t) = 0, u(1, t) = 0} :
> feltetel2 := {u(x, 0) = piecewise(x ≥ 0 and x ≤ Pi/2, x, x > Pi/2 and x ≤ Pi, Pi - x)} :
> megoldas := pdsolve(hur_egyenlet, feltetelek1 union feltetel2, numeric, timestep = 0.05,
spacestep = 0.12) :
```

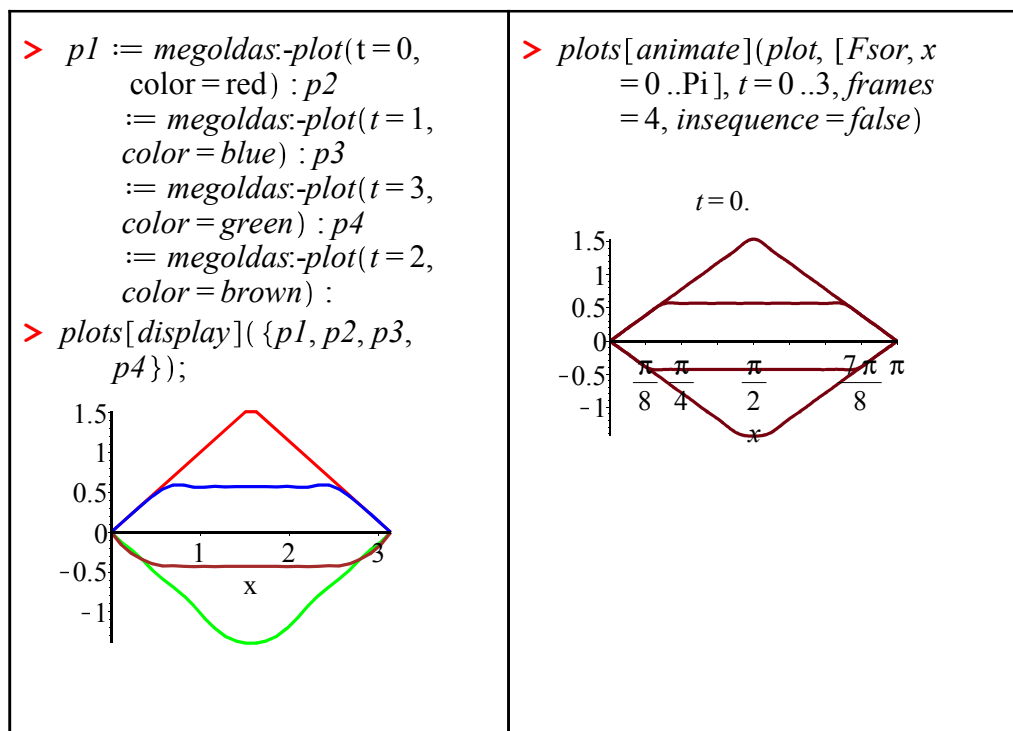
Adott helyen és időpontban a húr pontjának kitérését kiolvashatjuk a *value* opció segítségével.

```
> Kiteres_num := megoldas:-value( ); Kiteres_num(3, 3);
Kiteres_num := proc( ) ... end proc
[x = 3., t = 3., u(x, t) = -0.149725639994727]
```

Hasonlítsuk ezt össze az analitikus megoldás 20, részletösszegeként kapott megoldással:

```
> Fsor :=  $\frac{4 \left( \sum_{n=1}^{20} \frac{\sin\left(\frac{1}{2} \pi n\right) \sin(n x) \cos(n t)}{n^2} \right)}{\pi} :$ 
> Kiteres_sor := evalf(subs({x = 3, t = 3}, Fsor), 13); elteres
:=  $\frac{\text{abs}(Kiteres\_sor - rhs(Kiteres\_num(3, 3)[3]))}{\text{abs}(Kiteres\_sor)}$ 
Kiteres_sor := -0.1420506206304
elteres := 0.0540301713002660
```

Az eltérés 5%. Nézzük ábrázolva is:



10. Példa Oldjuk meg a hővezetés egyenletét, ha a feltételek:

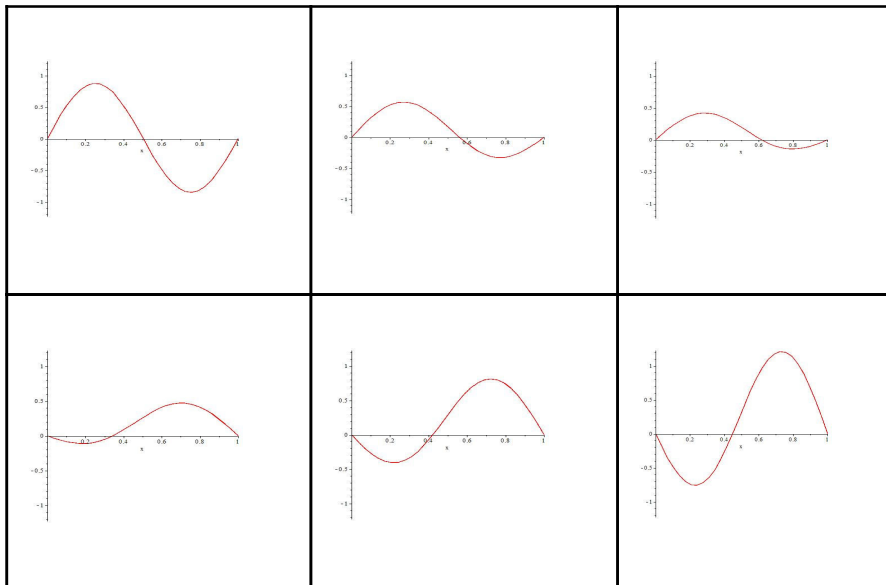
a.; $\alpha = 1$, $l = 1$, $u(x, 0) = \sin(2 \cdot \pi \cdot x)$, $\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = \sin(\pi \cdot x)$, $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$. Hol lesz a kitérés értéke a

$t_0=0.7$ sec időpillanatban 0.5?

b; $\alpha = 1$, $l = 1$, $u(x, 0) = \sin(\pi \cdot x)$, $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$. Vizsgáljuk meg, hogyan függ az $u(x, t)$ függvény a $\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0)$ értékétől.

Megoldás a;

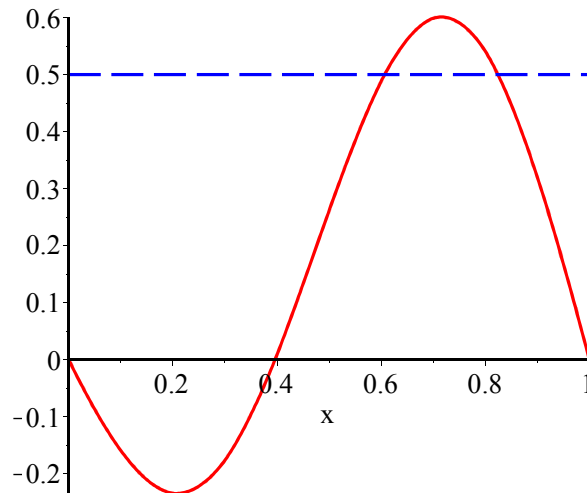
```
> restart; hur_egyenlet :=  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$  :
> l := 1 :  $\alpha := 1$  :
> feltetelek1 := {  $u(x, 0) = \sin(2 \cdot \pi \cdot x)$ ,  $D_2(u)(x, 0) = \sin(\pi \cdot x)$  } :
> feltetel2 := {  $u(0, t) = 0$ ,  $u(1, t) = 0$  } :
> megoldas := pdsolve(hur_egyenlet, feltetelek1 union feltetel2, numeric, timestep=0.05,
    spacestep=0.1) :
> Kiteres_num := megoldas:-value( ); Kiteres_num(0.5, 0.7);
    Kiteres_num := proc( ) ... end proc
    [x=0.5, t=0.7, u(x, t) = 0.261089496828205]
> megoldas:-animate( u(x, t), t=0..3, frames=100, numpoints=30) :
```



```
> t0 := 0.7 : megoldas:-value(t=t0, output=listprocedure) :
> u_ertek := rhs(op(3, %)) :
> fsolve(u_ertek(x) = 0.5, x=0..0.5); fsolve(u_ertek(x) = 0.5, x=0.5..1)
    fsolve(u_ertek(x) = 0.5, x, 0..0.5)
    0.8244277559
```

A periódus első feléhez nem tartozik megoldás. A periódus második felében kaptunk megoldást. Megtaláltuk az összes megoldást? Ábrázoljuk a kitérés idő függvényét és a keresett függvényértéket közös koordináta rendszerben.

```
> with(plots) : a := megoldas:-plot(u(x, t), t=0.7, numpoints=300) : b
    := plottools[line]([0, 0.5], [1, 0.5], color=blue, linestyle=dash) : display([a, b])
```



> *fsolve(u_ertek(x) = 0.5, x = 0.5 .. 0.7)*

0.6068833524

Tehát megállapíthatjuk, hogy a 0.7 s időpillanatban a húr kitérése 2 helyen 0.5 értékű.

Megoldás b;

> *restart, hur_egyenlet := $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$:*

> *l := 1 : $\alpha := 1$:*

> *feltetelek1 := {u(x, 0) = sin($\pi \cdot x$), u(0, t) = 0, u(1, t) = 0} :*

> *feltetel2 := {D₂(u)(x, 0) = 0} :*

> *feltetel3 := {D₂(u)(x, 0) = sin(2 · $\pi \cdot x$)} :*

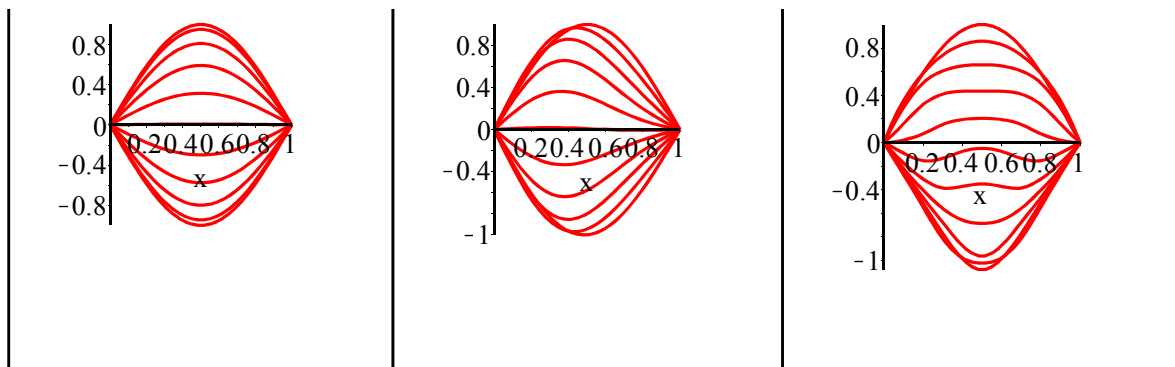
> *feltetel4 := {D₂(u)(x, 0) = cos(2 · $\pi \cdot x$)} :*

> *megoldas2 := pdsolve(hur_egyenlet, feltetelek1 **union** feltetel2, numeric, timestep = 0.05, spacestep = 0.1) :*

> *megoldas3 := pdsolve(hur_egyenlet, feltetelek1 **union** feltetel3, numeric, timestep = 0.05, spacestep = 0.1) :*

> *megoldas4 := pdsolve(hur_egyenlet, feltetelek1 **union** feltetel4, numeric, timestep = 0.05, spacestep = 0.1) :*

> <i>plots[display]([seq(megoldas2:- plot($u(x, t), t$ = $\frac{i}{10}$, numpoints = 30) , i = 0 .. 10)])</i>	> <i>plots[display]([seq(megoldas3:- plot($u(x, t), t$ = $\frac{i}{10}$, numpoints = 30), i = 0 .. 10)])</i>	> <i>plots[display]([seq(megoldas4:- plot($u(x, t), t$ = $\frac{i}{10}$, numpoints = 30), i = 0 .. 10)])</i>
--	---	---



▼ 12. 4. Feladatok

1. Oldja meg a $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, t) = 0$ Laplace-egyenletet, ha

$$R = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1\}, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = y, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Legyen $h = k = 0.1$.

2. Oldja meg a $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, t) = x \cdot e^x$ Poisson egyenletet, ha

$$R = \{(x, y) | 0 < x < 2, 0 < y < 1\}, \quad u(x, 0) = x, \quad u(x, 1) = e \cdot x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0, y) = 0, \quad u(2, y) = y, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Legyen $n = 6, m = 5$.

3. Oldja meg a $\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = 0$ parabolikus egyenletet, ha

$$0 < x < 2, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right), \quad 0 \leq x \leq 2, \quad u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0. \quad \text{Legyen } h = 0.1, \quad k = 0.01.$$

4. Oldja meg a $\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \frac{4}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = 0$ parabolikus egyenletet, ha

$$0 < x < 4, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right) \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right)\right), \quad 0 \leq x \leq 4, \quad u(0, t) = 0, \quad u(4, t) = 0.$$

Legyen $h = 0.2, \quad k = 0.04$. A megoldást hasonlítsa össze az egyenlet egzakt,

$$u(x, t) = e^{-t} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + e^{-\frac{t}{4}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right) \quad \text{megoldásával } t = 0.4 \text{ esetén.}$$

5. Oldja meg a $\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t)$ hiperbolikus differenciálegyenletet, ha $u(x, 0) = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = \sin(4 \cdot \pi \cdot x) \quad 0 \leq x \leq 0.5, \quad u(0, t) = 0, \quad u(0.5, t) = 0. \quad \text{Legyen } h = 0.3, \quad k = 0.05.$$

6. Az orgonasípban lévő levegő nyomását a $\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(x, t)$ egyenlet írja le, ahol c fizikai konstans, $0 < x < l, t > 0, l$ a síp hossza.

Zárt síp esetén a peremfeltételek: $p(0, t) = p_0, \quad \frac{\partial}{\partial x} p(l, t) = 0$,

nyitott sípnál $p(0, t) = p_0, \quad p(l, t) = p_0$.

Legyen $c = l = 1$, a kezdeti feltételek pedig $p(x, 0) = p_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot x)$ és $\frac{\partial}{\partial t} p(x, 0) = 0$.

Határozzuk meg mindkét esetben a $p(0.5, 0.5)$ és a $p(0.5, 1)$ értékeket, ha $p_0 = 0.9, h = k = 0.1$.

▼ 12. 5. Ellenőrző kérdések

1. Definiálja az elliptikus, parabolikus és hiperbolikus típusú parciális differenciálegyenletet.
2. Mi a szeparációs módszer lényege?
3. Írja le a rácsmódszer elvét elliptikus egyenlet megoldására, téglalap alakú tartomány esetén.
4. Milyen közelítő módszert ismer parabolikus differenciálegyenlet megoldására?
5. Milyen rácsháló esetén lesz stabil a parabolikus és milyen rácsháló esetén stabil a hiperbolikus differenciálegyenletet közelítő lineáris egyenlet rendszer?